POLSKA ADADEMIA NAUK
ODDZIAŁ W KATOWICACH
KOMISJA INŻYNIERII BUDOWLANEJ

ISSN 1505-8425

ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ

ZESZYT 12
OPOLE 2012

Ivan SLÁVIK
Physical and mechanical properties of coal fuel ashes
Fyzikále a mechanické vlastnosti popolov 55

Elżbieta JANOWSKA-RENKAS
Badania skuteczności działania w czasie domieszek polikarboksylanowych w zaczynach cementowych
Study of effectivenessof polycarboxylate admixture in cement pastes during the time 61

Michal KRAUS, Darja KUBEČKOVÁ
Energetická a finanční náročnost budovy s nízkou spotřebou energie
Energy and financial performance of low-energy building 65

Lukáš MARTINKA, Mária MASAROVIČOVÁ
Descriptive and index properties of a non-standard geomaterial
Opisné a indexové vlastnosti neštandardného geomateriálu 71

Eva REMIŠOVÁ
Resistance to permanent deformation in binder content and film thickness viewpoint
Odolnosť proti trvalým deformáciám z pohľadu obsahu a hrúbky filmu spojiva 77

Ivan SLÁVIK, Mária MASAROVIČOVÁ
Intensification of the construction of a desludging site dam using loess soils
Nadvýšenie hrádze popolového odkaliska zo sprašoidných zemín 83

Jan KUBIK
Twierdzenie o wzajemności dla dystorsji gradientowych
The reciprocity theorem for gradient distortion 89

Mariusz CZABAK, Zbigniew PERKOWSKI
Analiza wpływów reologicznych w zespolonym stropie drewniano-żelbetowym
Analysis of rheological influences in combined wooden-ferroconcrete floors 93

Kamil PAWLIK
Szacowanie funkcji relaksacji drewna wzdłuż i w poprzek włókien
Estimation of the relaxation functions of wood in length and across fibers 99

Paweł FEDCZUK
Uogólnione prawo wzmocnienia dla sprężysto-plastycznego modelu nienawodnionego gruntu
The generalized hardening rule for elasto-plastic model of unsaturared soil 103

Profesor Jarosław Burak (1932 – 2012) 107

Jubileusz Profesora Petera Haupla 109

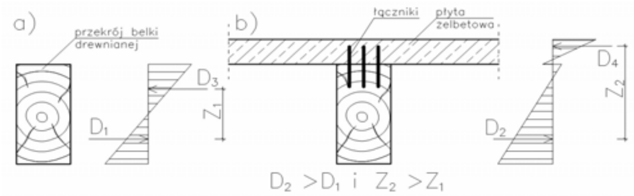
ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 12/2012
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ANALIZA WPŁYWÓW REOLOGICZNYCH W ZESPOLONYM STROPIE DREWNIANO-ŻELBETOWYM

Mariusz CZABAK, Zbigniew PERKOWSKI
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Ideą projektowania i realizowania zespolonych stropów drewniano-żelbetowych jest przede wszystkim znaczna poprawa właściwości mechanicznych tego typu konstrukcji w stosunku do klasycznego stropu drewnianego. Zespolenie realizowane jest m.in. za pomocą różnego typu łączników stalowych (np. [2,8]). Poglądowo na rys. 1 pokazano rozkłady naprężeń normalnych w poprzecznym przekroju zginanej belki drewnianej i takiej samej po zespoleniu jej z płytą żelbetową. W belce zespolonej element drewniany pracuje prawie w całości w strefie rozciąganej, co dzieje się bez znacznego zwiększania naprężeń krawędziowych u jego dołu. Jest to niezwykle korzystne z uwagi na fakt, że drewno wzdłuż włókien lepiej przenosi naprężenia rozciągające w porównaniu do ściskających.



Z_1,Z_2- ramiona wypadkowych od naprężeń rozciągających (D_1, D_2) i ściskających (D_3, D_4)

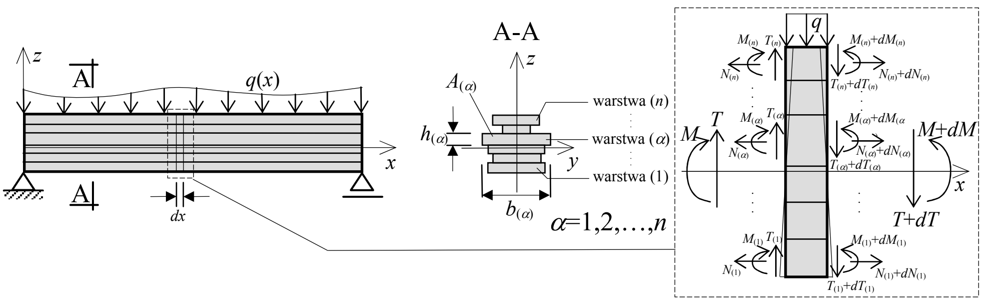
Rys. 1. Typowe rozkłady naprężeń normalnych w przekroju zginanej belki drewnianej (a) i po jej zespoleniu z płytą żelbetową (b).
Fig. 1. Typical distributions of normal stresses in the cross-section of bent wooden beam (a) and when it is combined with ferroconcrete plate (b).

Mamy tu do czynienia również ze wzrostem ramienia sił wewnętrznych, co prowadzi do wzrostu nośności i sztywności stropu bez znaczącego zwiększenia jego ciężaru własnego (jego ciężar to ok. 1.5kN/m^2, a np. stropu gęstożebrowego ok. 2.5kN/m^2). Zastosowanie takiego rozwiązania eliminuje efekt klawiszowania, jaki występuje na stropach drewnianych. Jest to rozwiązanie szczególnie cenne w przypadku rewitalizacji obiektów zabytkowych, gdyż pozwala na istotne wzmocnienie ich konstrukcji przy stosunkowo małej ingerencji w zastany układ nośny. Inną zaletą stosowania tego typu stropów jest fakt, że płyta betonowa tworzy poziomą tarczę usztywniającą cały budynek oraz pełni dodatkowo funkcję zabezpieczenia przeciwpożarowego belek z góry.

Należy w tym momencie wspomnieć, że choć w literaturze można spotkać się pracami, w których przedstawiony jest bardzo bogaty materiał eksperymentalny na temat zachowania się konstrukcji żelbetowo-drewnianych pod obciążeniem długotrwałym (w tym i zmiennym) (np. [9]), to uwzględnienie wpływu różnego tempa pełzania drewna i betonu na wytężenie stropowych układów zespolonych w codziennej praktyce projektowej, bez zastosowań drogich i specjalistycznych programów, pozostaje dalej kwestią otwartą. Stąd w niniejszym artykule zdecydowano się poruszyć ten temat i zaproponować odpowiednie wzory, uwzględniające wspomniany aspekt, które będą możliwe do „szybkiego" i efektywnego oprogramowania we własnym zakresie. W prezentowanym dalej podejściu zakłada się, w celu uproszczenia prowadzonych analiz, że wydzielone myślowo ze stropu drewniano-żelbetowego żebro można traktować jako warstwowy element belkowy o właściwościach liniowo lepkosprężystych. Zakłada się ponadto, że styk elementów żelbetowego i drewnianego jest realizowany za pomocą łączników stalowych (typu gwoździe, wkręty (rys. 1)). W związku z tym, jeśli ilość tych łączników dobrana zostanie na podstawie standardowego warunku ich nośności na ścinanie (np. wg [8]), to na podstawie analiz prowadzonych w [1] można stwierdzić, że jest wówczas możliwe pominięcie wpływu wzajemnego poślizgu belki drewnianej i płyty na dokładność obliczeń rozkładów naprężeń i traktowanie styku, jako tzw. idealnego. Przedstawione rozważania zakończono ilustrującym je przykładem obliczeniowym.

2. Przekrojowe siły i naprężenia w lepkosprężystym pręcie warstwowym

Rys. 2 pokazuje ideowo układ sił wewnętrznych w belce warstwowej w układzie odniesienia *xyz*, gdzie *x* jest osią podłużną belki. W celu uproszczenia rozważań przyjmuje się, że obciążenia mają charakter statyczny, przekrój zachowuje swoją płaskość i jest monosymetryczny względem osi *z*. Pręt składa się z układu *n* warstw idealnie zespolonych i równoległych do *x*. Każda z nich niech ma porządkowany indeks α=1,2,…,*n*, licząc od spodu.



Rys. 2. Siły wewnętrzne w belce warstwowej o przekroju monosymetrycznym.
Fig. 2. Internal forces in a layered beam of monosymmetrical cross-section.

Przypiszmy z kolei do każdej z warstw przenoszone przez nie siły przekrojowe na podstawie następujących zależności [4]:

$$N=\sum_{\alpha} N_{(\alpha)}=\sum_{\alpha}\int_{A(\alpha)}\sigma_{xx(\alpha)}dA,\; T=\sum_{\alpha} T_{(\alpha)}=\sum_{\alpha}\int_{A(\alpha)}\sigma_{xz(\alpha)}dA,\; M=\sum_{\alpha} M_{(\alpha)}=\sum_{\alpha}\int_{A(\alpha)}\sigma_{xx(\alpha)}z\,dA, \quad (1)$$

gdzie: N,T,M – przekrojowa siła osiowa (w analizowanym przypadku równa zero), tnąca i moment zginający; $N_{(\alpha)},T_{(\alpha)},M_{(\alpha)}$ – siła osiowa, tnąca i moment zginający w warstwie α; $A_{(\alpha)}$ – pole przekroju warstwy α; $\sigma_{xx(\alpha)}$, $\sigma_{xz(\alpha)}$ – naprężenie normalne i tnące w warstwie α. Niech naprężenia normalne $\sigma_{xx(\alpha)}$ i odkształcenia linowe $\varepsilon_{xx(\alpha)}$ w warstwie α wzdłuż osi x

będzie łączyć relacja jak w materiale liniowo lepkosprężystym, przy uwzględnieniu odkształcalności zgodnie z modelem standardowym (np. [5]):

$$\sigma_{xx(\alpha)} = \widetilde{E}_{(\alpha)} * d\varepsilon_{xx(\alpha)}\,,\ \widetilde{E}_{(\alpha)} = \frac{E_{(\alpha)}}{1+\phi_{(\alpha)}}\left(1+\phi_{(\alpha)}e^{-\beta_{(\alpha)}t}\right)H(t)\,, \tag{2}$$

gdzie: $f * dg = \int_0^t f(t-\tau)\dot{g}(\tau)\,d\tau$, przy czym t to czas, a τ to chwila wystąpienia przyrostu dg; $\widetilde{E}_{(\alpha)}, E_{(\alpha)}, \phi_{(\alpha)}, \beta_{(\alpha)}$ – funkcja relaksacji, moduł Younga, współczynnik pełzania i parametr opisujący intensywność przebiegu procesu relaksacji w warstwie α, $H(t)$ – funkcja Heaviside'a. Należy w tym momencie zaznaczyć, że w przypadku, w której jedna z warstw może być ortotropowa (np. z drewna) w prezentowanym modelu przypisane jej parametry $\widetilde{E}_{(\alpha)}, E_{(\alpha)}, \phi_{(\alpha)}, \beta_{(\alpha)}$ odnoszą się do tych mierzonych przy jednoosiowym stanie naprężenia wzdłuż osi x. Tym samym, w celu kolejnego uproszczenia, pomija się wpływ drugorzędnych naprężeń, jakie mogą pojawić się w belce w kierunku osi y w efekcie występowania nieidentycznej odkształcalności poprzecznej warstw. Wykorzystując hipotezę o zachowaniu płaskości przekrojów, tzn.:

$$\varepsilon_{xx(\alpha)} = \kappa\, z \ \rightarrow\ \sigma_{xx(\alpha)} = \int_0^t z\,\widetilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau)\,\dot{\kappa}(\tau)d\tau\,, \tag{3}$$

gdzie: κ – krzywizna przekroju zginanego, można podać wzory, pozwalające wyliczyć przyrosty krzywizny w analizowanej belce w sposób przybliżony. Biorąc (1_3), (2_1) i (3), otrzymujemy, że:

$$M = \sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \int_0^t \widetilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau)\,\dot{\kappa}(\tau)\,d\tau \approx \sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \widetilde{E}_{(\alpha)}\left(t-\tau_{(i)}\right) \Delta\kappa\left(\tau_{(i)}\right),$$
$$I_{y(\alpha)} = \frac{b_{(\alpha)}h_{(\alpha)}^3}{12} + b_{(\alpha)}h_{(\alpha)}z_{0(\alpha)}^2, \tag{4}$$

gdzie: $\tau_{(m)}=t$; $\Delta\kappa(\tau_{(i)})$ – skończony przyrost krzywizny, jaki wystąpił między chwilami $\tau_{(i-1)}$ i $\tau_{(i)}$; $I_{y(\alpha)}, b_{(\alpha)}, h_{(\alpha)}, z_{0(\alpha)}$ – moment bezwładności względem osi y, szerokość, wysokość i współrzędna środka ciężkości po osi z warstwy α. Stąd kolejne przyrosty $\Delta\kappa(\tau_{(m)})$ obliczać można jako:

$$\text{dla } m=1\text{: } \Delta\kappa\left(\tau_{(1)}\right) = \frac{M}{\sum_{\alpha} I_{y(\alpha)}\widetilde{E}_{(\alpha)}(0)}\,,\ \text{dla } m\geq 2\text{: } \Delta\kappa\left(\tau_{(m)}\right) = \frac{M - \sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} \widetilde{E}_{(\alpha)}\left(t-\tau_{(i)}\right)\Delta\kappa\left(\tau_{(i)}\right)}{\sum_{\alpha} I_{y(\alpha)}\widetilde{E}_{(\alpha)}(0)}\,. \tag{5}$$

Potrzebne do obliczeń $I_{y(\alpha)}$ położenie osi y wyznacza się z kolei z warunku zerowania siły osiowej w przekroju. Biorąc (1_1), (2_1) i (3) otrzymujemy :

$$N = \sum_{\alpha} S_{y(\alpha)} \int_0^t \widetilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau)\,\dot{\kappa}(\tau)\,d\tau \approx \sum_{\alpha} S_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \widetilde{E}_{(\alpha)}\left(t-\tau_{(i)}\right)\Delta\kappa\left(\tau_{(i)}\right) = 0\,,\ S_{y(\alpha)} = b_{(\alpha)}h_{(\alpha)}z_{0(\alpha)}\,, \tag{6}$$

gdzie: $S_{y(\alpha)}$ – moment statyczny warstwy α względem osi y. We wzorze (6) przyrosty krzywizn $\Delta\kappa(\tau_{(m)})$ należy obliczać przy wykorzystaniu (5). Odstępy kolejnych chwil $\tau_{(i)}$ sensownie jest przyjąć w równych interwałach Δt, tzn. $\tau_{(i)}=i\cdot\Delta t$ (i=1,2,…,m). Oczywiście dokładność obliczeń będzie, tym większa, im mniejsze przyjmiemy Δt.

W następnej kolejności można wyznaczyć rozkład naprężeń tnących w przekroju. Z warunku równowagi sił na oś x, działających na wycinek pręta o długości dx, który znajduje się ponad stykiem warstw k i k+1, otrzymujemy, że:

$$\sigma^{-}_{xz(k)} b_{(k)} dx = \sigma^{+}_{xz(k+1)} b_{(k+1)} dx = -\sum_{\alpha=k+1}^{n} \int_{A(\alpha)} \sigma_{xx(\alpha)} dA + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \int_{A(\alpha)} \left(\sigma_{xx(\alpha)} + d_x \sigma_{xx(\alpha)} \right) dA , \tag{7}$$

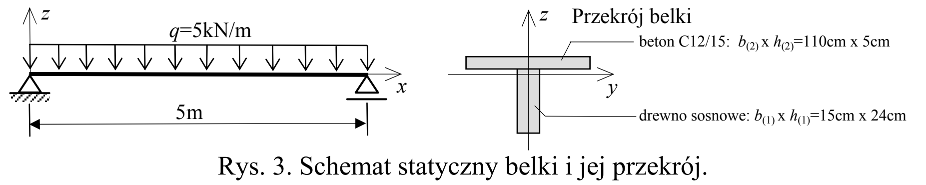
gdzie: $\sigma^{+}_{xz(k)}, \sigma^{-}_{xz(k+1)}$ – naprężenia tnące u góry warstwy k i u dołu warstwy k+1. Wykorzystując (2_1) i (3) otrzymujemy w efekcie z równania (7), że:

$$\begin{aligned} \sigma^{-}_{xz(k)} &= \frac{1}{b_{(k)}} \sum_{\alpha=k+1}^{n} S_{y(\alpha)} \int_{A(\alpha)} \widetilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \frac{\partial^2 (\kappa(\tau,x))}{\partial x \, \partial \tau} d\tau \approx \frac{1}{b_{(k)}} \sum_{\alpha=k+1}^{n} S_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \widetilde{E}_{(\alpha)}\left(t-\tau_{(i)}\right) \Delta\kappa'\left(\tau_{(i)}\right), \\ \sigma^{+}_{xz(k+1)} &= \frac{1}{b_{(k+1)}} \sum_{\alpha=k+1}^{n} S_{y(\alpha)} \int_{A(\alpha)} \widetilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \frac{\partial^2 (\kappa(\tau,x))}{\partial x \, \partial \tau} d\tau \approx \frac{1}{b_{(k+1)}} \sum_{\alpha=k+1}^{n} S_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \widetilde{E}_{(\alpha)}\left(t-\tau_{(i)}\right) \Delta\kappa'\left(\tau_{(i)}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie: $\Delta\kappa'(\tau_{(i)})$ – skończony przyrost pochodnej krzywizny po x, jaki wystąpił między chwilami $\tau_{(i\text{-}1)}$ i $\tau_{(i)}$. Znając przybliżone rozkłady krzywizn osi pręta dzięki wykorzystaniu relacji (5) w dowolnym przekroju o współrzędnej x, można obliczyć pochodne krzywizny po x, wykorzystując wzory na różnice skończone, a stąd dalej można wyznaczyć $\Delta\kappa'$. Z kolei naprężenia normalne można wyliczyć ze wzoru (3_2) również w sposób przybliżony, całkując go numerycznie, kiedy znane są już z relacji (5) przybliżone przyrosty krzywizn.

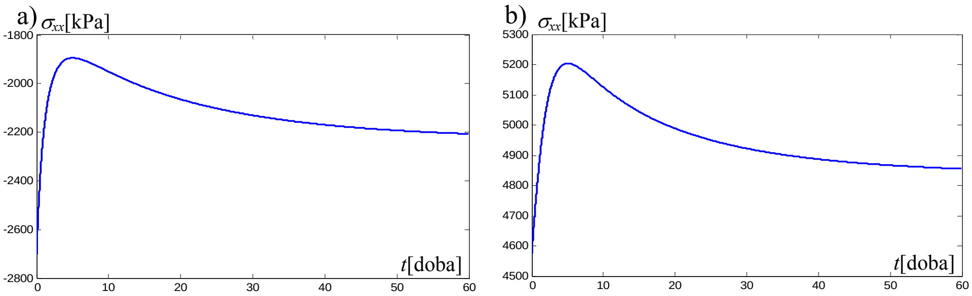
3. Przykład obliczeniowy

W celu zilustrowania możliwości wykorzystania wzorów wyprowadzonych w punkcie 2, przedstawione zostaną wyniki obliczeń naprężeń w przekrojach przykładowej belki wolnopodpartej o rozpiętości 5m (rys. 3). Belka składa się z dwóch warstw (dolna z drewna sosnowego klasy C27 o przekroju 15cm x 24cm i górna z betonu klasy C12/15 o przekroju 110cm x 5cm) z równomiernym obciążeniem pionowym o wartości 5kN/m, stałym w czasie i przyłożonym w sposób statyczny począwszy od chwili t=0. Zakłada się ponadto, że układ w chwili przyłożenia obciążenia znajduje się w ustalonym stanie cieplno-wilgotnościowym w powietrzu o RH=50% i temperaturze 20°C.



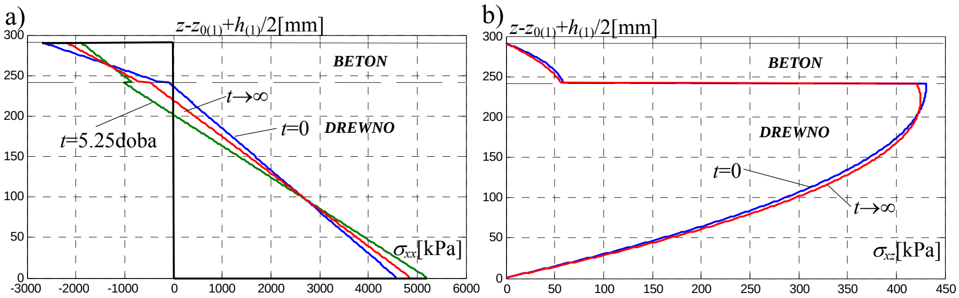
Rys. 3. Schemat statyczny belki i jej przekrój.
Fig. 3. The static scheme of beam and its cross-section.

Stąd parametry drewna przyjęto na podstawie [3,6] następująco: $E_{(1)}$=12.3GPa, $\beta_{(1)}$=0.127doba^{-1} i $\phi_{(1)}$=2. Z kolei parametry betonu przy wspomnianych założeniach przyjęto wg [7,10]: $E_{(2)}$=20.7GPa, $\beta_{(2)}$=1.1doba^{-1} i $\phi_{(2)}$=4.3. Obliczenia przeprowadzono w środowisku Matlaba w oparciu o własny program. Na rys. 4 przedstawiono przebiegi w czasie krawędziowych naprężeń normalnych w środku rozpiętości belki. Z kolei na rys. 5 pokazano rozkłady naprężeń tnących nad podporami i normalnych w środku rozpiętości po wysokości przekroju w wybranych chwilach. Przedstawione wykresy uwidaczniają, że w przypadku przyjętych danych, w okolicach piątego dnia trwania procesu naprężenia w betonie maleją bezwzględnie prawie o 1/3, a w drewnie rosną o ok. 15% w stosunku do wartości początkowych (odpowiadających rozwiązaniu sprężystemu). Ostatecznie w wyniku redystrybucji naprężeń część betonowa przekroju zostaje odciążona, a drewniana dociążona. W przypadku naprężeń tnących nie stwierdzono przy przyjętych danych znaczących odstępstw od wyników, jakie by uzyskano w oparciu o model sprężysty.



Rys. 4. Zmiany w czasie krawędziowych naprężeń normalnych w środku rozpiętości belki: a) od góry w elemencie betonowym, b) od spodu w elemencie drewnianym.

Fig. 4. The time changes of edge normal stresses at the middle of beam span: a) at the top of concrete element, b) at the bottom of wooden element.



Rys. 5. a) Naprężenia normalne w przekroju belki w środku rozpiętości.
b) Naprężenia tnące w przekroju belki nad podporą.

Fig. 5. a) Normal stresses in the cross-section of beam at the middle of span.
b) Shearing stresses in the cross-section of beam at the support.

4. Wnioski

Przeprowadzona analiza pokazuje, że wpływy reologiczne na ekstremalne wartości naprężeń normalnych w stropie zespolonym drewniano-żelbetowym nie są pomijalne i powinno się brać je pod uwagę przy projektowaniu tego typu ustrojów nośnych. Przykładowo uzyskana różnica na poziomie 15% w wartościach naprężeń normalnych w dolnym włóknie elementu drewnianego pomiędzy ujęciem sprężystym i lepkosprężystym pokazuje, że nieuwzględnienie nierównomiernej relaksacji naprężeń w obrębie układu może prowadzić w skrajnie niekorzystnych sytuacjach losowych do uszkodzenia belki drewnianej, jeśli zaprojektowano by ją w oparciu o model sprężysty przy maksymalnym wykorzystaniu nośności. Należy także wspomnieć, że w przypadku układu warstwowego o innych parametrach możliwe jest uzyskanie jeszcze bardziej niekorzystnych wyników w porównaniu do tych z przykładu.

Oznaczenia symboli

t - czas, time, [s],
E - moduł Younga, Young's modulus, [Pa],
$\widetilde{E}$ - funkcja relaksacji, relaxation function, [Pa],
N,T,M - siła osiowa i tnąca, moment zginający; axial and shearing force, bending moment; [N], [N·m];
α - indeks warstwy, index of a layer,
β - parametr funkcji relaksacji, relaxation function parameter, [s^{-1}],
ε_{ij} - składowa tensora odkształceń, strain tensor component, [-],
ϕ - współczynnik pełzania, creep coefficient, [-],
κ - krzywizna osi belki, curvature of centre line of a beam, [m^{-1}],
σ_{ij} - składowa tensora naprężeń, stress tensor component, [Pa],
τ - chwila, moment, [s],
Δ... - skończony przyrost, finite increment.

Literatura

[1] Czabak M., Analiza statyczno-wytrzymałościowa drewniano-żelbetowych stropów zespolonych, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole, 2012
[2] Godycki-Ćwirko T., Kleszczewski J., Pawlica J., Wzmacnianie stropów na belkach drewnianych przez ich zespolenie z płytą żelbetową, Tom I, Wyd. 10, PWN, Warszawa, 2006
[3] Guzy P., Badanie pełzania drewna sosnowego przy zginaniu, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole, 2006
[4] Kubik J., Mechanika konstrukcji warstwowych, Wyd. TiT, Opole, 1993
[5] Jakowluk A., Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach, WNT, Warszawa, 1993
[6] Pawlik K., Reologiczne właściwości drewna budowlanego, Rozprawa doktorska Politechnika Opolska, Opole, 2011
[7] Radziej A., Badanie wpływu porowatości na pełzanie zaprawy cementowej, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole, 2006
[8] Rudziński L., Naprawy i wzmocnienia konstrukcji drewnianych, Wyd. Pol. Świętokrzyskiej w Kielcach, Kielce, 2000
[9] Simon A., Analyse zum Trag- und Verformungsverhaltenvon Straßenbrückenin Holz-Beton-Verbundbauweise, Rozprawa doktorska, Universität Weimar, Weimar, 2008
[10] PN-EN 1992-1-1, Projektowanie konstrukcji z betonu Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków

ANALYSIS OF RHEOLOGICAL INFLUENCES IN COMBINED WOODEN-FERROCONCRETE FLOORS

Summary

A method estimating normal and shearing stresses in the rib of combined wooden-ferroconcrete floor is presented in the work. The layered linear viscoelastic beam is assumed as a model for the floor rib what enables in the simple way taking into account an influence of different creep rates of wood and concrete on an effort of floor elements.